The Borel-Tits property and p-stubborn complex for simple groups(Groups and Combinatorics)

吉荒, 聡

数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 125-136

The Borel-Tits property and the p-stubborn complex for simple groups

Satoshi Yoshiara
吉荒 聡（大阪教育大・数理科学）

これは１９９６年１２月１３日（金）に研究集会「群論と組合せ数学」において筆者が行った講演の大まかな再現である。p-部分群のなす単体複体の研究への invitation という講演時の意図に添い、分かりやすく記述するように心掛け、理解を助ける多少の詳細と用語の解説を新たに付け加えた。

1　内容概説

表題にある *p-stubborn complex*（または *p-radical complex*）とは、任意の有限群 G とその位数を割り切る素数 p に対して定まる、次の性質を満たす自明でない p-部分群 U が包含関係に関してなす半順序集合 $\mathcal{B}_p(G)$ の ordered complex のことである（この概説で使う位相幾何に関する用語に関しては最終章にまとめた。そこで断ったように ordered complex も同じく $\mathcal{B}_p(G)$ と書く）。

> U は、G における U の正規化群 $N_G(U)$ 中の正規 p-部分群のうち、最大のものである：$O_p(N_G(U))=U$

この概説では、単体複体 $\mathcal{B}_p(G)$ の重要性を示唆する幾つかの事実に言及したのち、この複体を再帰的に求める方法について解説する。更に、これらの事実の意味を考えるとき、群 G の素数 p に関する性質は $\mathcal{B}_p(G)$ とホモトピー同値な極小の単体複体 $\mathcal{L}_p(G)$ に集約されており、この複体 $\mathcal{L}_p(G)$ こそが、(G,p) に対する最も重要な幾何であると主張する。また、標数 p 型の有限単純群 G に対する $\mathcal{L}_p(G)$ のリストを具体的に挙げる。

以下、G は有限群を表し、p はその位数 $|G|$ を割り切る素数とする。更に、Δ は単体複体で、その上に群 G が単体構造を保存するよう (*simplicially*) に作用、すなわち次の条件が満たされているとする。

> G の元 g が Δ の単体 $\sigma=\{v_1,\dots,v_m\}$ を全体として固定しているならば σ を構成する頂点 v_i $(i=1,\dots,m)$ をすべて固定する。

2　コホモロジーの交代和分解と標準的な複体

代数、特に Dade 予想にかかわる者にとっては、先の単体複体 $\mathcal{B}_p(G)$ を p-radical complex と呼ぶのが通例であり、これを p-stubborn complex と呼ぶのは、（一部の）代数的トポロジーの研究者である。複体 $\mathcal{B}_p(G)$ や、これに関係した幾つかの単体複体に対する彼らの関心は、これらの複体を使うと、コホモロジー環の加群構造が（原理的には）帰納的に決定出来るという事実に起因する。

有限群 G とその位数の素因子 p に対して G が simplicial に作用するある単体複体 Δ をうまく選ぶと、p-進整数環 $\mathbf{Z}_p$ 係数の G のコホモロジーに関する次の分解が得られる。

交代和分解 2.1

$$\tilde{H}^n(G, \mathbf{Z}_p) = \sum_{\sigma \in \Delta/G} (-1)^{\dim(\sigma)} \tilde{H}^n(G_\sigma, \mathbf{Z}_p),$$

ここで等号は p-束縛な可換群に付随する *Grothendieck group* において考えている。また n は非負整数、σ は Δ 上の G-軌道の代表元の集合 Δ/G をもれなくひとつずつ動き、G_σ は単体 $\sigma \in \Delta/G$ の G における *stabilizer* をあらわす。(ここではコホモロジーに関する用語の厳密な定義は与えないので、*[1],[2]* 等を参考にして欲しい。)

この形の分解をコホモロジーの交代和分解という。近年 Milgram, Adem, Green, Tezuka-Yagita を中心に、散在型単純群の $\mathbf{Z}_p$ 係数のコホモロジー環構造の研究が目ざましく進展している。上の分解は、こうした研究の中で時々効果的に用いられている。そこで次のような問題が自然に考えられる。

問題 2.2 *(a)* 任意の有限群 G とその位数の素因子 p に対して、交代和分解が成り立つような標準的な単体複体 Δ を求めよ。ないしは G が *simplicial* に作用する単体複体 Δ に対して、交代和分解が成り立つような充分条件を求めよ。

(b) 具体的に与えられた有限群 G とその位数の素因子 p に対して、交代和分解が成り立つような極小の単体複体 Δ を求めよ。

上の問題 (a) に対しては、Brown, Quilen に始まる研究があり、その要素を抽出して得られた Webb による次の充分条件は最も使いやすい。

定理 2.3 *[10]* 次の条件が満たされるとき $\tilde{H}(G, \mathbf{Z}_p)$ に対する交代和分解が成立する。

> $(*)$ G の位数 p の各元に対して、g により固定される単体全体のなす Δ の部分複体 Δ^g は可縮である。

G が Δ 上に simplicial に作用しているので、G の元 g の固定する単体の全体 Δ^g は Δ の部分複体をなすことに注意せよ。Webb の条件 $(*)$ の検証は、最終章にまとめた結果や技法を使えば、多くは部分群の性質を調べることに帰着される。

例えば、自明でない部分群全体が包含関係に関してなす半順序集合 $\mathcal{S}_p(G)$ の ordered complex をとり、その上に G を共役によって作用させると、p-部分群 U と U^g の位数は同じであるから、この作用は simplicial である。また、位数 p の元 g が固定する元のなす半順序集合 $\mathcal{S}_p(G)^g$ は $U^g = U$ を満たす自明でない p-部分群 U から成るので、U と $\langle g \rangle$ の上限 $\langle U, g \rangle = U\langle g \rangle$ が常に存在し、最終章の 5.2(ii) によって $\mathcal{S}_p(G)^g$ は可縮になる。従って Webb の定理 2.3 から複体 $\mathcal{S}_p(G)$ に対してコホモロジーの交代和分解が成り立つ。ここで更に次の事実が確かめられる。

命題 2.4 今までに現れた半順序集合も含めて、改めて次の半順序集合を考える。すると、これらの *ordered complex* $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$, $\mathcal{Z}_p(G)$ はすべて ホモトピー同値であり、しかも同値を与える写像は G の共役による作用と両立している(*G-equivariant* にホモトピー同値である)。従って、上で見たことから、これらの複体に対してコホモロジーの交代和分解が成り立つ。

$$\mathcal{S}_p(G) := \{P \mid \ P \text{ は } G \text{ の自明でない } p\text{-部分群}\},$$
$$\mathcal{A}_p(G) := \{E \in \mathcal{S}_p(G) \mid E : \textit{elementary abelian}\ \},$$
$$\mathcal{B}_p(G) := \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid U = O_p(N_G(U))\},$$
$$\mathcal{Z}_p(G) := \{E \in \mathcal{A}_p(G) \mid E = \Omega_1(Z(C_G(E)))\}.$$

従って、この4つの標準的な複体は問題 (a) に対する答となっている。このなかで、$\mathcal{S}_p(G)$ 及び $\mathcal{A}_p(G)$ は一般に非常に大きく、その G-orbit の代表元とその stabilizer を求め ても、そのリストは膨大なものになり、交代和分解は実用的ではない。従って、具体的にコホモロジーを求めるという立場に立てば、残り2つの比較的小さい複体を求めるという問題が重要であろう。これが p-stubborn complex $\mathcal{B}_p(G)$ を調べることの一つの動機である。また、有限群 G に対して $O_p(G)$ が自明でなければ5.2を使うとこれら4つの複体はすべて可縮になってしまうので、この問題が面白いのは $O_p(G) = 1$ のとき、特に G が単純群のときである。

問題 2.5 有限（単純）群 G とその位数の素因子 p について、複体 $\mathcal{B}_p(G)$ の単体上の G-軌道の代表元を求めよ。

この問題へのアプローチについて説明するのが、本概説の一つの目的であるが、残る複体 $\mathcal{Z}_p(G)$ については、殆ど何も知られていないように思う。24 次 Mathieu 群 M_{24} に対する $\mathcal{Z}_2(M_{24})$ の計算は力づくで何とか出来るが、頂点集合上の G-軌道だけでも 19 個もあり、これと $\mathcal{B}_2(M_{24})$ との関係もあまりはっきりしたものではない。

ごく最近問題 (a) に対するトポロジストからの貢献が幾つか得られている（[7, §4] 参照）。例えば Dwyer の結果は群論研究者が検証できる言葉で記述されており、非常に興味深い。残念ながら証明は p-進ホモトピーの理論を用いているようで、筆者には理解し難い。より初等的な証明は得られないものであろうか。また問題 (b) への挑戦といえるのが [7] であり、本概説の数学的部分の多くはこの論文に含まれている。本概説は [11] を更に平明に書き直したものである。

3 Borel-Tits の性質と stubborn 複体を求める帰納的方法

実は、標数 p の体上で定義された Lie 型の有限単純群 G に対しては、上の問題 2.5 の答は非常に簡単に与えられる。すなわち、この場合、$\mathcal{B}_p(G)$ の頂点集合は G の unipotent radical の全体と一致しているという事実が、次の Borel と Tits による定理の系として直ちに得られる。この事実はまた、代数の研究者が $\mathcal{B}_p(G)$ を p-radical complex と呼ぶことの裏付けになっている。

定理 3.1 標数 p の代数閉体上の半単純線形代数群 Γ 上の自己準同型写像ρ の固定部分群 $G = \Gamma^\rho$ が有限であるとする。このとき 自明でない G の p-部分群 U に対して G の放物型部分群（Γ の放物型部分群の ρ による固定点）で $N_G(U) \leq P$ および $U \leq O_p(P)$ を満たすものが存在する。

上の定理の有限群 G に対し、U が複体 $\mathcal{B}_p(G)$ の頂点ならば、$N_G(U) \leq P$ および $U \leq O_p(P)$ を満たす放物型部分群 P を取るとき、仮に $U < O_p(P)$ と仮定すれば $(U <)\ N_{O_p(P)}(U)$ は $N_G(U)$ の正規な p-部分群となるから $O_p(N_G(U)) = U$ に反する。従って

系 3.2 上の定理の有限群 G に対して半順序集合 $\mathcal{B}_p(G)$ はすべての放物型部分群 P の *unipotent radical* $O_p(P)$ から成る。

ここで、更に広いクラスの有限群に対して上と類似の結果を得るために、上の系を単体複体の言葉で書き直してみる。すなわち、Lie 型の有限単純群 G に対してその建物 (*building*) と呼ばれる、ある種の公理系を満たす単体複体 $\Delta(G)$ を考えることができ、放物型部分群はこの複体 $\Delta(G)$ の単体の G における stabilizer に他ならないことから、次を得る。

> 標数 p の Lie 型の有限群 G の任意の自明でない部分群 U に対して、G の建物 $\Delta(G)$ の単体 σ で $N_G(U) \leq G_\sigma$ 及び $U \leq O_p(G_\sigma)$ を満たすものがある。

上の言い換えにおける二つの包含関係のうち、前者は複体の言葉のみで記述されており、これは任意の有限群とそれが作用する複体に関して意味を持つ条件である。これに注目して次の概念を考える。

定義 3.3 *(The Borel-Tits property)*
G を有限群、p をその位数の素因子とする。G が *simplicial* に作用する単体複体 Δ に関する次の性質 (BT/Δ) をΔ に関する Borel-Tits property という。

> G の各々の自明でない p-部分群 U に対して、ある単体 $\sigma \in \Delta$ が存在して $N_G(U)$ は G における σ の *stabilizer* G_σ に含まれる : $U \leq G_\sigma$.

注意 3.4 この性質の意味を解説する前に幾つか注意しておく。

(1) どんな有限群に対しても (BT/Δ) を満たすような単体複体 Δ が存在する。例えば、すべての極大部分群のなす半順序集合の order complex をとればよい。しかし、この複体は、一般に手に負えない程巨大なものであるので、(BT/Δ) を満たすなるべく小さい、扱い易い複体 Δ があるかどうかが問題となる。

(2) 一つの群に対して (BT/Δ) を満たす複体は、一般には複数個存在する。例えば、5 次対称群 $G = S_5$ は 4 元体上の 2 次一般半線形群 $P\Gamma L_2(4)$ と同型である。Lie 型の群としての後者の見地に付随して、 Borel-Tits property を満たす複体として、$SL_2(4)$ の建物 Δ_2 が得られるが、これは 5 個の頂点からなる非連結な 0-次元の複体である。前者の立場からすると、次の複体 $\Delta_1 = \bar{C}(5)$ が (BT/Δ) を満たすことが確かめられる。$\bar{C}(5)$ の頂点は 5 個の文字 $\{1,\ldots,5\}$ とその三つ組 $\{ijk|1 \leq i < j < k \leq 5\}$ からなり、文字 i と三つ組 jkl は$i \in \{j,k,l\}$ であるとき incident であるという。複体 $\bar{C}(5)$ は、互いに incident な文字と三つ組をその単体と定義して得られる、1 次元の複体である。この複体は連結であるから、建物 Δ_2 とはホモトピー同値ですらない。

複体 $\mathcal{B}_p(G)$ は (BT/Δ) を満たすうまい複体が見つかれば、帰納的に求めることができる。次の簡単な事実はその方法の原理を示す。

補題 3.5 (1) G の任意の自明でない p-部分群 V に対して$\mathcal{B}_p(G)$ に入る p-部分群 U で $V \leq U$ 及び $N_G(V) \leq N_G(U)$ を満たすものが存在する。特に (BT/Δ) を確かめるには、$\mathcal{B}_p(G)$ の元についてのみ検証すればよい。

(2) (BT/Δ) が成り立つならば、すべての $U \in \mathcal{B}_p(G)$ に対して $O_p(G_\sigma) \leq U$ である：ここで σ は $N_G(U) \leq G_\sigma$ を満たす Δ の単体とする。
更に、もし $U \neq O_p(G_\sigma)$ ならば、$U/O_p(G_\sigma)$ は $G_\sigma/O_p(G_\sigma)$ に対する $\mathcal{B}_p(G_\sigma/O_p(G_\sigma))$ に入る。

証明 (1) p-部分群 U_i, V_i の列を $U_0 := V$, $N_0 := N_G(V)$, から初めて帰納的に $U_i := O_p(N_{i-1})$, $N_i := N_G(U_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ として定めれば、$U_{i-1} \trianglelefteq N_{i-1}$ より $U_{i-1} \leq U_i$ であり、また $N_{i-1} \leq N_i$ である。G は有限群だから部分群の増加列 $V = U_0 \leq U_1 \leq \cdots$ はどこかで停止する。$U := U_n = U_{n+i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ とすれば、$U = O_p(N_G(U))$ すなわち $U \in \mathcal{B}_p(G)$ となる。また $N_G(V) = N_0 \leq N_n = N_G(U)$ であるから主張を得る。

(2) $P := O_p(G_\sigma)$ とおく。$N_G(U) \leq G_\sigma$ だから $N_G(U)$ は UP を正規化し、従って $U(N_G(U) \cap P)$ は $N_G(U)$ の正規な p-部分群である。U は $\mathcal{B}_p(G)$ の元、つまり $U = O_p(N_G(U))$ なので、これから $U(N_G(U) \cap P) = U$ であり $N_{UP}(U) = N_G(U) \cap UP = U(N_G(U) \cap P) = U$ となる。よって $UP = U$ すなわち $P \leq U$ となり前半が言えた。後半は $N_{G_\sigma/P}(U/P) = N_{G_\sigma}(U)/P = N_G(U)/P$ から $O_p(N_{G_\sigma/P}(U/P)) = O_p(N_G(U))/P = U/P$ となることから出る。 □

従って、

方法 3.6 有限群 G に対する半順序集合 $\mathcal{B}_p(G)$ を求めるには、次のようにすればよい。

(*i*) (BT/Δ) を満たす複体 Δ を見つける。（なるべく小さく、出来れば Δ の各単体 σ に対して $O_p(G_\sigma) \neq 1$ が満たされるような複体 Δ が望ましい。）

(*ii*) Δ の各単体 σ に対して, 群 $G_\sigma/O_p(G_\sigma)$ の *p-stubborn complex* $\mathcal{B}_p(G_\sigma/O_p(G_\sigma))$ を求める。

(*iii*) 得られた候補が実際に $\mathcal{B}_p(G)$ に入るかどうか確かめる。

4 実例と多少の詳細

4.1 標数 p 型の単純群に対し BT-property を満たす複体

この節では、方法 3.6 を用いて具体的な有限単純群 G と素数 p についてその p-radical complex $\mathcal{B}_p(G)$ がどのように求められるのか解説する。方法 3.6 は $\mathcal{B}_p(G)$ の計算を proper (p-local) subgroup G_σ の剰余群 $G_\sigma/O_p(G_\sigma)$ の p-radical complex の計算に帰着するものであったから、(BT/Δ) を満たすと共に、多くの単体 $\sigma \in \Delta$ に対して $O_p(G_\sigma) \neq 1$ が成り立つような複体 Δ が発見できる有限群 G が最も扱い易い。このような複体－いわゆる p-local geometry は多くの単純群 G について知られているが、ここでは標数 p 型の群 G を考えよう。

定義 4.2 有限群 G が標数 p 型 *(characteristic-p type)* であるとは、そのすべての p-局所部分群 H に対してその一般化された *Fitting* 部分群 $F^*(H)$ が p-群となることである。

典型的な例は標数 p の体上で定義された Lie 型の有限群であるが、この群に対する p-stubborn complex は Borel-Tits の定理から完全に決定されている。その他の場合は表 4.6 にまとめて示す。この表には、標数 p 型の単純群 G のそれぞれに対して Borel-Tits property (BT/Δ) を満たす Δ が与えられている。それぞれの複体の完全な記述は、個々の論文を参照して欲しい（例

えば [7] 参照) が、この表では、Δ の頂点(幾つかの type に分かれる)の stabilizer が type に従って与えられている。

Δ の頂点集合には incidence という関係(反射的かつ対称的な関係で、同じ type を持つ異なる二元は incident ではない)が与えられており、Δ の各単体は互いに incident な頂点の集合である。Δ の各頂点 v に対して v と incident な頂点の全体に incidence を制限して得られる複体を v における剰余空間 (*residue*) といい、$Res(v)$ と書く。剰余空間は頂点 v のまわりの局所的な情報を与えており、その上に v の stabilizer G_v が作用する。この作用の核を K_v と記す。

表では Δ の各 type に対し(G の頂点集合上の軌道は type と一対一に対応する)、この type の頂点 v の stabilizer G_v の大まかな構造が、$A\backslash B$ として与えられている。ここで A は剰余空間 $Res(v)$ 上の核 K_v の構造を表し、B は G_v が剰余空間に引き起こす自己同型群 (G_v/K_v) の構造を表している。群に関する記号は ATLAS 記号を用いた。

更に、幾つかの複体 Δ においては、剰余空間 $Res(v)$ の構造も次の記号を用いて記述されている:

> $PG(n,s)$ は order s の n-次元射影空間、$GQ(s,t)$ (resp. $GH(s,t)$) は order (s,t) の一般化された四辺形(resp. 六辺形)、$\tilde{Q}(2,2)$ は $GQ(2,2)$ のある double covering、$C(n)$ は n 点上の完全グラフの点と辺のなす一次元複体、$\bar{C}(5)$ は 前節の注意 (2) に現れた複体、m は m 点からなる非連結な 0 次元複体、$X * Y$ は 複体 X と Y の join(特に $m * n$ は m, n 点からなる part を持つ完全二部グラフ、つまり一般化された二辺形)。

これらの Δ に関する情報に加えて、各 G に対する複体 $\mathcal{B}_p(G)$ の頂点集合上の G-軌道の総数、及びその次元が与えられている。

4.3 BT-property を満たす複体を知って stubborn complex を求める

(BT/Δ) を満たす Δ に対する上の表のような情報がわかれば、方法 3.6 を用いて $\mathcal{B}_p(G)$ は容易に求められる。このことを 標数 2 型の群 $G = M_{24}$(24 次 Mathieu 群)を例にとって示そう。

この場合 Borel-Tits property を満たす複体として、M_{24} のいわゆる 2-local geometry Δ が取れることが確かめられる。この複体の頂点は Steiner system $S(24,8,5)$ の octad, trio, sextet と呼ばれる部分構造からなり、それらに自然な包含関係により incidence を定義すると、Δ の 2-次元単体は互いに incident な octad O, trio T, sextet Σ からなる。更に M_{24} は Δ 上 simplicial かつ旗上可移に作用し、特に単体の stabilizer は G_O, G_T, G_Σ の幾つかの共通部分と G-共役となる。さて、(BT/Δ) が満たされることから、任意の $U \in \mathcal{B}_2(M_{24})$ に対してその適当な共役を取れば適当な $v = O, T, \Sigma$ に対して $N_G(U) \leq G_v$ 従って $O_p(G_v) \leq U$ であり 3.5(2)、$U_v := O_p(G_v) = O_p(K_v)$ は表から読み取れる。

特に $U = U_v$ $(v = O, T, \Sigma)$ であるか、または U/U_v は $\mathcal{B}_2(G_v/K_v)$ に入る。もし $v = O$ ならば $G_O/K_O \cong L_4(2)$ は Lie 型の有限単純群で $Res(O) = PG(3,2)$ は $L_4(2)$ に対応する建物である。従って $\mathcal{B}_2(G_O/K_O)$ は Borel-Tits の定理から $L_4(2)$ の unipotent radical に他ならず、すべて求められる。この結果は $U = K_{\{O,X\}}$ という形に書ける。ここで X は $\{T,\Sigma\}$ の他にもう一つ $PG(3,2)$ の超平面に対応する(Δ 中には実際には存在しない)type の頂点 $\Box$ を架空に考えたときの $\{T,\Sigma,\Box\}$ の部分集合で、$K_{\{O,X\}}/K_O$ は $G_O/K_O \cong L_4(2)$ の X に対応する単体の $Res(O)$ 中の剰余空間 $Res(O,X)$ への作用の核である。特に X が T ないしは Σ を含むならば $K_{\{O,X\}}$ は K_T ないしは K_Σ を含む。

次に $K_O \not\leq U$ かつ $U_\Sigma < U$ とすれば、 G_Σ/K_Σ が Lie 型の群 $Sp_4(2)$ であり、$Res(\Sigma) \cong GQ(2,2)$ はその建物であることに注意すると、U/U_Σ は対応する unipotent radical $K_{\Sigma,Y}/U_\Sigma$ ($Y = O, T$ または $\{O,T\}$) に共役であり、U が決まる。残った場合は $U_\Sigma < U$ のときであるが、 このときは G_T/K_T が直積 $L_2(2) \times Sp_4(2)$ であり、この群の $\mathcal{B}_2$ は今まで得られた K_Z に対する K_Z/K_T であることが容易に確認できる。

従って M_{24} に対する 2-stubborn complex $\mathcal{B}_2(M_{24})$ は完全に求められた。

> $\mathcal{B}_2(M_{24})$ は $8+3=11$ 個の共役類からなり、その代表元として $U_F := O_2(K_F)$ が取れる。ここで F は $\{O,T,\Sigma,\Box\}$ の空でない部分集合で $F \cap \{O,\Box\} \neq \{\Box\}$ を満たすものすべてを動く。(Fig.1 参照)

以上の方法に多少慣れれば、表にある Δ に関する情報のみから、$\mathcal{B}_p(G)$ はたやすく読み取れる。例えば、J_4 のような巨大な群の 2-radical complex も M_{24} と M_{22} に対する 2-radical complex を組み合わせるだけで、簡単に求められる。帰納的な手法が適用可能であるということを明示した点に、方法 3.6 の意義がある。

4.4 注意

ここでは標数 p 型の単純群のみを取り上げたが、もちろん方法 3.6 による試みは、他の群や素数 p に対しても適用可能である。実際に McL で $p=2$ のときは殆ど同じ方法を、McL の作用する極めて建物に近い複体（の truncation ） Δ が (BT/Δ) を満たすことから、ほぼ同じ論法で $\mathcal{B}_2(McL)$ が求められる。

もちろん方法 3.6 がうまく機能するためには、(BT/Δ) を満たすうまい複体 Δ を見いだす必要がある。多くの場合、各単純群に対して今までに発見されている（特に p-local な）幾何の中から良い候補が見いだされるように思われる。知られている幾何を適当に変形することにより、(BT/Δ) を満たす複体 Δ が発見されることもある（例えば表における M_{23} に対する複体)。しかし、F_3 や F_5 のように幾何が知られていない単純群の場合、どうしたら良いのかは問題である。

また、どのように (BT/Δ) を確かめるかについて、多少なりとも統一的なやり方は（小数例を除いて）知られていない。うまい検証が出来る例においては、その群の「自然表現」について調べることが肝要である。その他の場合には今の所、極大部分群の分類に頼っている（参考 [7])。この点の改善が、今後強く望まれる。

このように色々と技術開発の余地はあるが、これをきっかけにして、Lie 型の群以外の単純群についてその p-stubborn complex を求めるいう仕事は、十分に手の着く段階にあると思う。この概説では触れなかったが、得られる結果は Dade 予想の検証などにも貢献するであろう。この方面の研究に若い研究者が参入されることを切に望む次第である。

問題 4.5 上の方法にならうか、またはそれを改善して、他の単純群についても *p-radical complex* $\mathcal{B}_p(G)$（少なくともその頂点）の完全なリストを作れ。特に、$Co1$, F_1, F_2, F_3, F_5 など大きな散在型単純群の $p = 2,3,5$ などに対するもの。

4.6 (BT/Δ) を満たす幾何 Δ と $\mathcal{B}_p(G)$

p	G	Δ				$\mathcal{B}_p(G)$	
2	$L_3(3)$	$2\backslash S_4$	$2^2\backslash S_3$			3	1
2	$U_4(3)$	$2^4\backslash A_6$	$2_+^{1+4}\backslash S_3 \times S_3$	$2^4\backslash A_6$		7	2
		$GQ(2,2)$	$3*3$	$GQ(2,2)$			
2	$G_2(3)$	$1\backslash G_2(2)$	$2_+^{1+4}\backslash 3^2.2$	$2^3\backslash L_3(2)$		7	2
		$GH(2,2)$	$3*3$	$PG(2,2)$			
2	M_{11}	$2\backslash S_4$	$2^2\backslash S_3$			3	1
2	M_{22}	$2^3\backslash L_3(2)$	$2^4\backslash A_6$	$2^4\backslash S_5$		7	2
		$PG(2,2)$	$\tilde{Q}(2,2)$	$\bar{C}(5)$			
2	M_{23}	$2^3\backslash L_3(2)$	$2^4\backslash A_7$	$2^4.3\backslash S_5$		7	2
2	M_{24}	$2^4\backslash L_4(2)$	$2^6\backslash S_3 \times L_3(2)$	$2^6 3\backslash S_6$		11	3
		$P(3,2)$/plane	$3*PG(2,2)$	$GQ(2,2)$			
2	J_3	$2^4\backslash 3 \times L_2(4)$	$2^{2+4}\backslash 3 \times S_3$	$2_+^{1+4}\backslash A_5$		4	2
2	J_4	$2^{10}\backslash L_5(2)$	$2^{3+12}\backslash S_5 \times L_3(2)$	$2_+^{1+12}.3\backslash M_{22}.2$	$2^{11}\backslash M_{24}$	23	4
					Δ for M_{24}		
2	Co_2	$2_+^{1+6} \times 2^4\backslash L_4(2)$	$2_+^{1+8}\backslash Sp_6(2)$	$2^{4+10}\backslash(S_5 \times S_3)$	$2^{10}\backslash M_{22}.2$	15	3
					Δ for M_{22}		
2	Th	$2_+^{1+8}\backslash A_9$	$2^5\backslash L_5(2)$			16	4
3	$U_5(2)$	$3\backslash PSp_4(3)$	$(3 \times 3^{1+2}).2\backslash 2 \times A_4$	$3^4\backslash S_5$		4	2
		$GQ(3,3)$	$2*4$	$C(5)$			
3	Ru	$3\backslash A_6.2^2$	$3^2 2\backslash PGL_2(3)$			3	2
3	J_4	$3 \times 2\backslash M_{22}.2$	$3^2.2 \times 2^2\backslash PGL_2(3)$			3	2
3	$O'N$	$3^2 4\backslash S_6$	$3^4 2\backslash 2^4 D_{10}$			2	1
3	McL	$1\backslash \Omega_6^-(3)$	$3^4\backslash M_{10}$	$3^{1+4}2\backslash S_5$		3	1
		$GQ(3,9)$	$2*10$	$C(5)$			
3	Ly	$3\backslash McL.2$	$3^{2+4}.2\backslash A_5.D_8$	$3^5.2\backslash M_{11}$		4	2
				$C(11)$			
5	Ly	$1\backslash G_2(5)$	$5^{1+4}.4\backslash S_6$	$5^3\backslash L_3(5)$		4	2
		$GH(5,5)$	$6*6$	$PG(2,5)$			
5	Th	$5^{1+2}.4\backslash S_4$	$5^2.4\backslash L_2(5)$			2	1

4.7 結果の検証

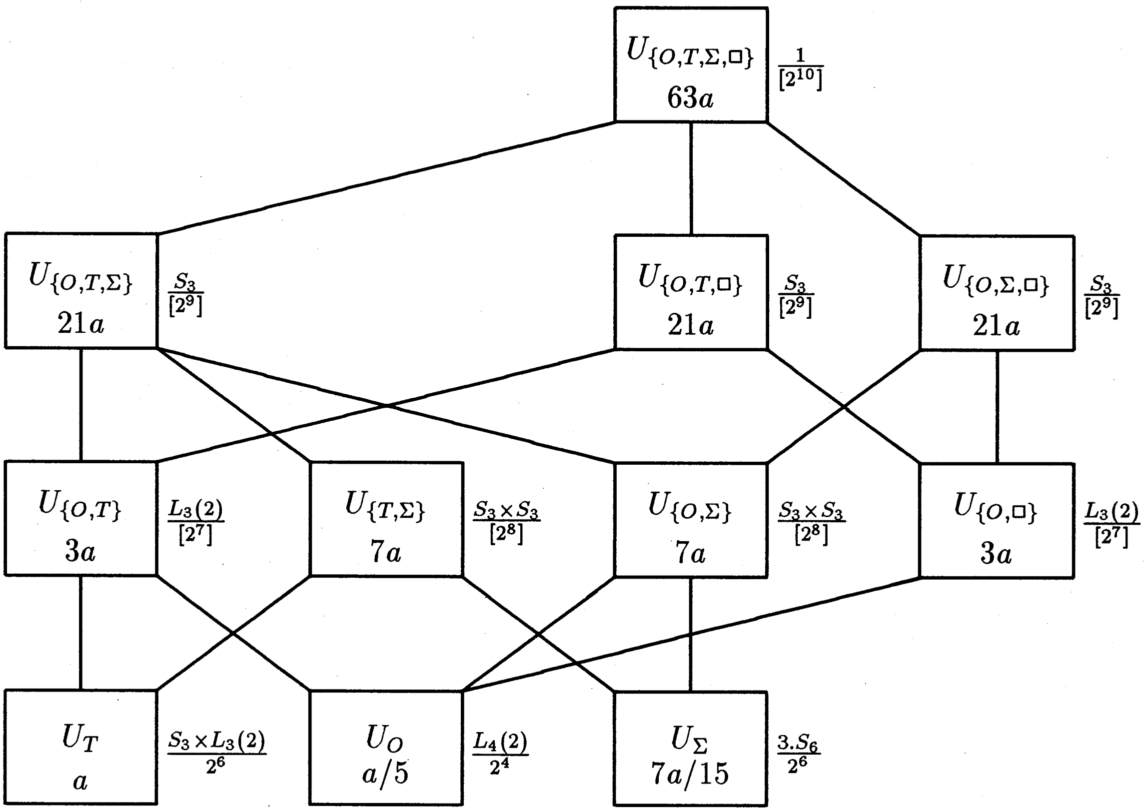
得られた結果が確からしいことを見るのには、次の定理に基づいて Euler 標数 を計算するのが効果的である。

Webb の定理の条件 $(*)$ を満たす複体 Δ に対してその被約 Euler 標数 $\tilde{\chi}(\Delta)$ は G の位数を割り切る p の最高べき $|G|_p$ の倍数である。ここで

$$\tilde{\chi}(\Delta) = -1 + \sum_{i=0}^{\dim(\Delta)} (-1)^i |\{\ i\text{-simplices of } \Delta\}|$$

条件 (*) が成り立てば被約 Lefschetz 加群 $\tilde{L}(\Delta)$ とよばれる形式的加群が射影加群となり、その次元である被約 Euler 標数が $|G|_p$ の倍数となるのである。詳しい証明は例えば [8] 参照。

Figure 1: $\mathcal{B}_2(M_{24})$ の代表元 U_F 間の包含関係



被約 Euler 標数の計算は、可能な単体の形が色々ある場合には結構面倒であるが、ともかく単なる計算である。24 次 Mathieu 群について、$\mathcal{B}_2(M_{24})$ の頂点の代表元の間の包含関係に基づいて（ Fig. 1 参照）被約 Euler 標数 $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_2(M_{24}))$ を計算してみると、$21504 = 2^{10} \cdot 21$ となり、これは確かに $2^{10} = |M_{24}|_2$ で割り切れる。

この被約 Euler 標数の計算は、M_{24} に対する 2-local geometry Δ についても同様に実行されるが、この複体上に M_{24} が旗上可移に作用している（ type の同じ単体は同じ M_{24}-軌道にはいる）おかげで、こちらの方がはるかに易しく求められる。しかもこの値は $\mathcal{B}_2(M_{24})$ の被約 Euler 標数に等しく、これから $\mathcal{B}_2(M_{24})$ は 2-local geometry Δ とホモトピー同値ではないかと推察されるが、実際にそうなっていることが collapse して行くことにより確かめられる。

実際には、すべての標数 p 型の単純群 G に対して $\mathcal{B}_p(G)$ は表に示した複体 Δ とホモトピー同値であることを示すことが出来る。従って、次のようにいっても過言では無かろう。

> 先の Table の複体 Δ は 標数 p 型の単純群 G（とその位数の素因子 p ）に対する「建物」（最も本質的な幾何）である。

5 位相幾何の用語と関連する技法

この概説では主に動機付けの部分に位相幾何の概念が幾つか現れる。実はこうした位相幾何上の概念なり条件は、群に関連した半順序集合に付随する単体複体を扱う際には、Quillen 等の結果を使うと、群の部分群の交わり、包含関係などについての地道な考察に帰着されることが多い。まず基本用語の復習から始める [5, §2,3] 。

ある集合 V があって、V の有限部分集合の族 Δ が次の条件を満たすとき、Δ を（抽象）単体複体 (*simlicial comlex*) 、Δ の元を単体 (*simplex*) 、特に V の元 v に対応する $\{v\}$ の形の単体（ないしは v 自身）を Δ の頂点 (*vertex*) と呼んだ。

(1) すべての $v \in V$ に対して $\{v\} \in \Delta$

(2) 各々の $\sigma \in \Delta$ に対し、σ のすべての空でない部分集合は Δ の元である。

また、単体複体 Δ の部分集合 Γ が Δ の部分複体であるとは、任意の $\sigma \in \Gamma$ について、そのすべての空でない部分集合が Γ に属することである。

順序 $\leqq$ に関する半順序集合 $\mathcal{P}$ において、線形に順序がつく $\mathcal{P}$ の元からなる集合（または列）

$(x_0, \ldots, x_l)$ 、ここで $x_0 \ll x_1 \ll \cdots \ll x_l$、

を $\mathcal{P}$ の **chain**（鎖）というが、$\mathcal{P}$ の空でない chain 全体は $\mathcal{P}$ を頂点の集合とする（抽象）単体複体である。これを半順序集合の *order complex* といい、以下簡単のため同じ記号 $\mathcal{P}$ で表す。

抽象単体複体は、以下のように幾何学的に実現される。適当な自然数 N に対するユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ 中の点集合 $\{v_0, \ldots, v_n\}$ が幾何学的に独立（つまり $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ かつ $\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0$ を満たす実数 t_i はすべて 0 に限る）としたとき、

$$\{x \in \mathbf{R}^N | x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, 0 \leq t_i \leq n (i = 0, \ldots, n)\}$$

を $v_0, \ldots, v_n$ のはる（幾何学的）単体という。この単体の面 (*face*) とは、$v_0, \ldots, v_n$ の部分集合のはる単体のことであった。特に v_i 自身を頂点と呼ぶ。幾つかの幾何学的単体からなる集合 Γ が次の条件を満たすとき、これを（幾何学的）単体複体と呼んだ。

(1) Γ の任意の単体に対して、そのすべての面は Γ に属す。

(2) Γ のどの二つの単体をとっても、それらの交わりは（空集合であるか）それぞれの単体の面である。

幾何学的単体複体 Γ に対して、その頂点の集合 V の空でない有限部分集合 $\{v_0, \ldots, v_n\}$ が集合 Δ の元であるのは、$v_0, \ldots, v_n$ がはる単体が Γ の単体であるとき、かつそのときに限るとして集合 Δ を定義すれば、Δ は（V を頂点の集合とする）抽象単体複体になる。逆に抽象単体複体 Δ に対して、このような幾何学的複体 Γ は線形同型を除いてただ一通りに定まる [5, 3.1(b)] 。更に、この Γ のすべての単体の合併集合として得られる $\mathbf{R}^N$ の部分集合に、次のように位相を与えて得られる位相空間が得られるが、これを抽象複体 Δ の幾何学的実現といい、$|\Delta|$ と書く。

Γ の各単体には、$\mathbf{R}^N$ の部分集合として自然に位相をいれる。
一般の $A \in |\Delta|$ に対して、A が閉集合であるのは、すべての Γ の単体σ に対して $A \cap \sigma$ が σ の閉集合であるとき、かつそのときに限る。

二つの（抽象）単体複体 Δ_1 と Δ_2 がホモトピー同値であるとは、それぞれの幾何学的実現の間に連続写像 $f : |\Delta_1| \to |\Delta_2|$ と $g : |\Delta_2| \to |\Delta_1|$ が存在して、合成写像 $g \circ f$ が 恒等写像 $1_{|\Delta_1|}$ とホモトピーであり、$f \circ g$ が 恒等写像 $1_{|\Delta_2|}$ とホモトピーとなることである。ここで、一般に位相空間 X から Y への二つの連続写像 f, g がホモトピーであるとは、単位区間 $I = [0,1]$ との積空間 $X \times I$ から Y への連続写像 H ですべての $x \in X$ に対し $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ を満たすものが存在することである。特に、一点からなる集合と $|\Delta|$ がホモトピー同値であるとき、抽象複体 Δ は可縮 (*contractible*) であるという。

半順序集合 $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ の間の順序を保つ写像 f は、それぞれの order complex 間の（単体を単体に移す）写像に自然に拡張され、これは、それぞれの複体の幾何学的実現 $|\mathcal{P}_1|$ と $|\mathcal{P}_2|$ の間の連続写像 $\bar{f}$ に拡張される。次の Quillen による定理 [6, 1.6] は、$\bar{f}$ が $|\mathcal{P}_1|$ と $|\mathcal{P}_2|$ の間のホモトピー同値を与えるための充分条件を、半順序集合の言葉で記述したものであり、ここに現れるファイバーが可縮という条件は検証しやすい。（原証明は spectral sequence を用いており、私には理解しづらいが、より古典的な acyclic carrier theorem [5, 13.3,13.4] に基づく Walker の初等的な証明 [9] がある。）

定理 5.1 半順序集合間の順序を保つ写像 $f : (\mathcal{P}_1, \leqq) \to (\mathcal{P}_2, \leq)$ が、

すべての $y \in \mathcal{P}_2$ に対して、 ファイバー $\{x \in \mathcal{P}_1 | f(x) \leq y\}$（これは $\mathcal{P}_1$ の *order complex* の部分複体をなす）が可縮

という条件を満たせば、f は $|\mathcal{P}_1|$ と $|\mathcal{P}_2|$ の間のホモトピー同値を誘導する。

上の条件は、ある半順序集合の order complex の幾何学的実現が可縮である、という形の条件である。このための、検証しやすい充分条件を幾つか挙げる。

補題 5.2 次のいずれかの条件が成り立つとき半順序集合 $(\mathcal{P}, \leq)$ の *order complex* は可縮である。

(1) $\mathcal{P}$ において唯一つの最大元（または最小元）が存在する。

(2) $\mathcal{P}$ のある特定の元 c があって、すべての $x \in \mathcal{P}$ に対して x と c の上限 $x \cup c$（$x \leq y$ かつ $c \leq y$ を満たす y の中の最小元）が存在する。

(1) の条件が満たされるとき $\mathcal{P}$ の order complex はこの最大元（または最小元）を頂点とする錘であるから、直感的に明らかなように、これは可縮である。また半順序集合 $\{y | x \leq y \leq (x \cup c)\}$（最大元 $x \cup c$ ）と $\{y | c \leq y \leq (x \cup c)\}$（最小元 c ） に (1) を二段階に適用すれば、すべては一点 c に縮められ (2) が得られる。(2) の条件が満たされるとき、半順序集合 $\mathcal{P}$ は conically contractible という。

半順序集合 の order complex と限らない（抽象）単体複体を扱うとき、次もよく使われる。一般に、単体複体 Δ の単体 τ とその部分集合 σ に対して、τ を真に含む単体は存在せず、τ は σ を含む唯一の単体であるとき、τ は σ 上 free であるという。このとき、直感的には明らかに 複体 Δ と Δ から σ, τ を除いて得られる複体とはホモトピー同値である。この様に、ある単体 σ 上 free な単体 τ をどんどん取り除いていって、最終的に一点に潰せるときに、Δ は *collapseble* という。明らかに collapseble な複体は可縮である。

References

[1] A. Adem and R. J. Milgram, *The Cohomology of Finite Groups, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft* **309**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1994.

[2] D. Benson, *Representations and Cohomology: Cohomology of Groups and Modules, Cambridge studies in advanced mathematics* **31**, Cambridge U. Press, Cambridge, 1991.

[3] A. Borel and J. Tits, Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques des groups réductives, *Inv. Math.*, **12** (1971), 97–104.

[4] N. Burgoyne and C. Williamson, On theorem of Borel and Tits for finite Chevalley groups, *Arch.Math.* **27** (1976), 489–491.

[5] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.

[6] D. G. Quillen, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, *Adv. in Math.*, **28** (1978), 101–128.

[7] S. D. Smith and S. Yoshiara, Some homotopy equivalences for sporadic geometries, to appear in *J. Algebra.*

[8] J. Thévenaz, Permutation representations arising from simplicial complexes, *J. Comb. Th. A*, **46** (1987), 121–155.

[9] J. W. Walker, Homotopy type and Euler-characteristic of partially ordered sets, *Europ. J. Combin.*, **2**, 373–384, 1981.

[10] P. Webb, A local method in group cohomology, *Comment. Math. Helv.*, **62**, 135–167, 1987.

[11] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, submitted to *the Proceeding of the conference Groups and Geometries (Siena, September 1996).*